Olimpiada Naţionala de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2012
Clasa a XI-a

Barem clasa a XI-a

1. Relatia din enunt se scrie $t_{n+1} - t_n \le u_{n+1} - u_n$, unde $u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} n \in \mathbb{N}^*$

   2p

   $s_n = t_{n+1} - u_{n+1}$ este un sir monoton descrescator si deci exista $\lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 2p

   u_n este un sir convergent si t_n admite un subsir marginit rezulta ca s_n admite un subsir marginit 1p

   Din faptul ca exista $\lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ si s_n admite un subsir marginit, rezulta s_n convergent 1p

   s_n , u_n convergente si $t_{n+1} = s_n + u_{n+1}$ rezulta t_n convergent 1p

2. Din relatia din enunt se obtine :

   $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, n≥2 3p

   Sa se arate ca a_n este un sir descrescator de numere pozitive (chiar >1) 2p

   Se obtine ca a_n este convergent cu limita 1 2p

3. Calculeaza A^2, A^3 2p

   Obtine $A^3 = -31 \cdot I_3$ 2p

   $A^{3k} = (-31)^k \cdot I_3$; $A^{3k+1} = A^{3k} \cdot A = (-31)^k \cdot A$;

   $A^{3k+2} = A^{3k} \cdot A^2 = (-31)^k \cdot A^2$ 3p

4. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel incat $\varepsilon^3 = 1$. Se obtine :

   $A^2 + B^2 + AB = (A - \varepsilon B)(A - \varepsilon^2 B)$ (1) 2p

   $f(x) = \det(A - xB) = detB \cdot x^2 + tx + detA$ (2) 2p

   Din (1) si (2) gasim:

   $det(A^2 + B^2 + AB) = f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon^2) =$

   $t^2 - (detA + detB)t + (detA)^2 - detA \cdot detB + (detB)^2$ 2p

   Functia de gradul al doilea in t are un minim egal cu $\frac{3}{4}(detA - detB)^2$ 1p